Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Determinau l'equació en forma contínua de la recta r que passa pel punt *(1,1,1)* i és paral·lela a la recta r_1 d'equacions implícites (7 punts)
$$r_1: \begin{cases} -3x + y - z + 12 = 0, \\ x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$
Donau l'equació vectorial (1 punt), les equacions paramètriques (1 punt) i la forma implícita (1 punt) de la recta calculada r.
2. Calculau els valors de m per als quals la matriu
$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
no té inversa (4 punts). Si $m = 2$ calculau, si és possible, la inversa de la matriu A (4 punts) i resoleu el sistema d'equacions $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 punts)
3. Determinau els intervals de creixement i decreixement, els màxims i mínims, els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de la funció $f(x) = (x-3)^4(x-1)$. (10 punts)
4. Feu un dibuix del recinte limitat per les paràboles $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$ (3 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte (7 punts).

Opció B

1. Determinau l'equació en forma contínua de la recta r que passa pel punt *(3,4,7)* i és perpendicular a les rectes r_1 i r_2 donades per (10 punts)
$$r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}, \qquad r_2: x - 1 = y - 2 = \frac{z-3}{4}.$$
Donau l'equació vectorial (1 punt), les equacions paramètriques (1 punt) i la forma implícita (1 punt) de la recta calculada r.
2. Discutiu el rang de la matriu A en funció dels diferents valors de a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}. \qquad \text{(6 punts)}$$
Resoleu el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ per als valors de a per als quals el rang de la matriu A és 3 (4 punts).
3. Calculau els valors dels paràmetres a, b i c de la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de manera que la funció $f(x)$ tingui un màxim per a x=-1, un mínim per a x=3 i passi pel punt $(0,5)$. (10 punts)
4. Utilitzant el teorema de Bolzano i de Rolle, provau que l'equació $\tan x = 2x$ té una única arrel real a l'interval $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. (10 punts)